TKD SAINTEK: MATEMATIKA

1. Jika $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 1 \end{cases}$, maka $x + y = ...$

(A.) 1
(B.) 2
(C.) 3
(D.) 4
(E.) 5

Pembahasan:
Misalkan:

$$a = \frac{1}{x+y} \text{ dan } b = \frac{1}{x-y}$$

maka persamaan pada soal dapat diganti menjadi persamaan di bawah.

$$2a - b = \frac{3}{4}$$
$$a + 2b = 1$$

Eliminasi a untuk mendapatkan nilai b

$$\begin{array}{rl|l|rl} 2a - b &= \frac{3}{4} & \times 1 & 2a - b &= \frac{3}{4} \\ a + 2b &= 1 & \times 2 & 2a + 4b &= 2 \; - \\ \hline & & & -5b &= -\frac{5}{4} \\ & & & b &= \frac{1}{4} \end{array}$$

Substitusi nilai $b = \frac{1}{4}$ pada persamaan a + 2b = 1 untuk mendapatkan nilai a.

$$a + 2b = 1$$
$$a + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$
$$a + \frac{1}{2} = 1$$
$$a = \frac{1}{2}$$

Diketahui bahwa nilai $a = \frac{1}{x+y}$ maka,

$$a = \frac{1}{x+y}$$
$$x + y = \frac{1}{a}$$
$$x + y = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Jadi, nilai $x + y = 2$

» **Jawaban: B**

2. Seorang pelajar berencanan untuk menabung di koperasi yang keuntungannya dihitung setiap semester. Apabila jumlah tabungan menjadi dua kali lipat dalam 5 tahun, maka besar tingkat suku bunga per tahun adalah ....

(A) $2(\sqrt[10]{2} - 1)$
(B) $2(\sqrt[5]{2} - 1)$
(C) $2(\sqrt{2})$
(D) $2(\sqrt[5]{2})$
(E) $2(\sqrt[10]{2})$

Pembahasan:
Keuntungan dihitung setiap semester dalam 5 tahun, maka periode menabung = n = 5 × 2 (dalam 1 tahun ada 2 semester) = 10.

Jumlah tabungan menjadi dua kali lipat artinya,
Jumlah Tab. (M_n) = 2 Tab. Awal (M_0) → $M_n = 2\,M_0$.

Ditanyakan: bunga pertahun (2i)...?

Rumus bunga majemuk: $M_n = M_0 (1+i)^n$

Sehingga,

$$2M_0 = M_0 (1+i)^{10}$$
$$2 = (1+i)^{10}$$
$$\sqrt[10]{2} = 1 + i$$
$$i = \sqrt[10]{2} - 1$$

Jadi, besar bunga pertahun adalah $2i = \sqrt[10]{2} - 1 = 2\left(\sqrt[10]{2} - 1\right)$

» **Jawaban: A**

3. Hasil penjumlahan semua bilangan bulat yang lebih besar dari –10 dan memenuhi $\frac{a - |a-2|}{a} > 2$ adalah ....

(A) –21
(B) –28
(C) –36
(D) –45
(E) –55

Pembahasan:
Misalkan bilangan bulat yang akan dijumlahkan dinyatakan dalam variabel a, maka:
Kondisi 1: Bilangan bulat lebih besar dari –10 → $a > -10$
Kondisi 2: a memenuhi persamaan $\frac{a - |a-2|}{a} > 2$

Ingat! Pertidaksamaan Harga Mutlak

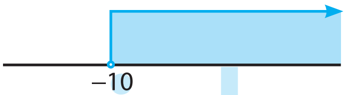
$$|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \leftrightarrow x > a \text{ atau } x < -a$$

Mencari solusi persamaan pada kondisi 2:

$$\frac{a-|a-2|}{a} > 2$$
$$\frac{a-|a-2|}{a} - 2 > 0$$
$$\frac{a-|a-2|-2a}{a} > 0$$
$$\frac{-a-|a-2|}{a} > 0$$
$$-a-|a-2| > 0$$
$$-|a-2| > a$$
$$|a-2| < -a$$
$$a-2 < -a$$
$$a+a < 2$$
$$2a < 2$$
$$a < 1$$

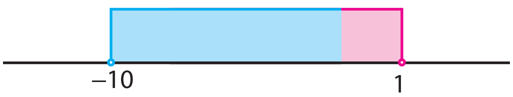
Perhatikan daerah a yang memenuhi kedua kondisi di atas.

Kondisi 1: Bilangan bulat lebih besar dari $-10 \rightarrow a > -10$



Kondisi 2: a memenuhi persamaan $\frac{a-|a-2|}{a} > 2 \rightarrow a < 1$

Gabungan antara kondisi 1 dan kondisi 2



$$-10 < a < 1$$

Bilangan bulat dalam rentang $-10 < a < 1$ adalah –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, dan 0.

Dapat diketahui bahwa n = 10, $U_1 = -9$, dan $U_{10} = 0$.

Jadi, hasil penjumlahan semua bilangan bulat yang lebih besar dari –10 dan memenuhi $\frac{a-|a-2|}{a} > 2$ adalah

$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_{10})$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(-9+0)$$
$$= 5(-9)$$
$$= -45$$

» **Jawaban: D**

4. Diketahui vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ vektor-vektor pada bidang datar sehingga $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{a}+\vec{b}$. Jika $|\vec{a}|:|\vec{b}| = 1:2$ maka besar sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah ....

(A) 30^o
(B) 45^o
(C) 60^o
(D) 120^o
(E) 150^o

Pembahasan:

Diketahu **vektor a tegak lurus dengan vektor (a + b)**, maka perkalian kedua vektor **sama dengan nol**. Sehingga,

$$a \cdot (a+b) = 0$$
$$|a|^2 + a \cdot b = 0$$
$$a \cdot b = -|a|^2$$

Diketahuibahwa $|\vec{a}|:|\vec{b}| = 1:2$ maka $|a|:|b| = 1:2 \rightarrow |b| = 2|a|$

Ingat! Rumus Perkalian Vektor

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$$

dengan θ adalah sudut yang dibentuk antara vektor a dan vektor b

Substitusi nilai a · b = – $|a|^2$ dan |b|=2|a| pada rumus perkalian vektor sehingga diperoleh hasil berikut.

$$-|a|^2 = |a| \cdot 2|a| \cdot \cos\theta$$
$$\cos\theta = -\frac{|a|^2}{|a| \cdot 2|a|}$$
$$= -\frac{|a|^2}{|a| \cdot 2|a|}$$
$$= -\frac{|a|^2}{2|a|^2}$$
$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta = 120^\circ$$

» **Jawaban: D**

5. Jika x_1 dan x_2 memenuhi 2 sin x + sec x – 2 tan x – 1 = 0, maka nilai sin x_1 – cos x_2 yang mungkin adalah ....

(A.) $\frac{4}{5}$
(B.) $\frac{3}{4}$
(C.) $\frac{4}{3}$
(D). $\frac{3}{2}$
(E.) 2

Pembahasan:

$$2\sin x + \sec x - 2\tan x - 1 = 0$$
$$2\sin x + \frac{1}{\cos x} - 2\frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0$$
$$2\sin x - 2\frac{\sin x}{\cos x} - 1 + \frac{1}{\cos x} = 0$$
$$2\sin x\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) - \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$
$$(2\sin x - 1)\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

Diperoleh dua persamaan yaitu

$$(2\sin x - 1) = 0 \quad \text{atau} \quad \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

Untuk $2\sin x - 1 = 0$ maka

$$2\sin x - 1 = 0$$
$$2\sin x = 1$$
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Untuk $1 - \frac{1}{\cos x} = 0$ maka

$$1 - \frac{1}{\cos x} = 0$$
$$\frac{1}{\cos x} = 1$$
$$\cos x = 1$$

Jadi, nilai ilai $\sin x_1 - \cos x_2$ yang mungkin adalah

$$\sin x_1 - \cos x_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

» **Jawaban: D**

6. Persamaan hiperbola yang mempunyai asimptot $y = 2x$ dan $y = 4 - 2x$, serta melalui (3, 0) adalah ....
(A.) $(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = 4$
(B.) $(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 12$
(C.) $4(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 4$
(D.) $4(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 12$
(E.) $4(x - 1)^2 - (y + 2)^2 = 12$

Pembahasan:

TRIK!
Substitusi titik koordinat (3, 0) akan menghasilkan kemungkinan jawaban pada pilihan D dan E yang benar.

Eliminasi garis asimptot hiperbola untuk mencari pusat hiperbola.

$$y \quad 2x$$
$$\underline{y = 4 - 2x}$$
$$0 = 4 - 4x$$
$$4x = 4 \rightarrow x = 1$$

Substitusi niali $x = 1$ pada persamaan $y = 2x$, sehingga diperoleh nilai $y = 2(1) = 2$.
Pusat parabola tersebut adalah (1, 2), pilihan yang benar adalah D.

» **Jawaban: D**

7. Misalkan $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 4bx + 18 = (x - 2)g(x) + 2b$ maka $g(-2) = ...$
(A.) 12
(B.) 10
(C.) 8
(D.) 6
(E.) 4

Pembahasan:

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

Substitusi $x = 2$ pada $f(x)$
$f(2) = 3(2)^3 - 9(2)^2 + 4b(2) + 18$
$f(2) = 3(8) - 9(4) + 8b + 18$
$f(2) = 24 - 36 + 8b + 18$
$f(2) = 8b + 6$

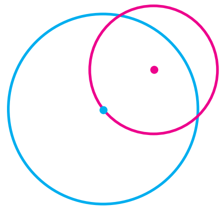
Berdasarkan teorema sisa maka $f(2) = 2b$
$$2b = 8b + 6$$
$$2b - 8b = 6$$
$$-6b = 6$$
$$b = \frac{6}{-6} = -1$$

Pada soal diketahui bahwa
$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 4bx + 18 = (x - 2)g(x) + 2b$
Atau,
$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 4bx + 18$$
$$(x-2)g(x) + 2b = 3x^3 - 9x^2 + 4bx + 18$$

Substitusi nilai $x = -2$ pada $f(-2)$:
$$(-2-2)\cdot g(-2) + 2(-1) = 3(-2)^3 - 9(-2)^2 + 4(-1)(-2) + 18$$
$$-4\cdot g(-2) - 2 = 3(-8) - 9(4) + 8 + 18$$
$$-4\cdot g(-2) - 2 = -24 - 36 + 26$$
$$-4\cdot g(-2) = -34 + 2$$
$$g(-2) = \frac{-32}{-4} = 8$$

» **Jawaban: C**

8. Perhatikan gambar di bawah!

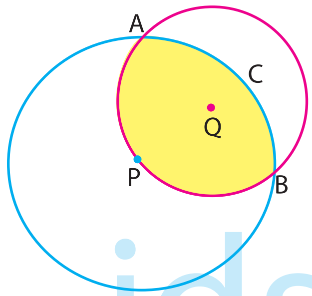


Diketahui suatu lingkaran kecil dengan radius $3\sqrt{2}$ melalui pusat lingkaran besar yang mempunyai radius 6. Ruas garis yang menghubungkan dua titik potong lingkaran merupakan diameter dari lingkaran kecil, seperti pada gambar. Luas daerah irisan kedua lingkaran adalah ....

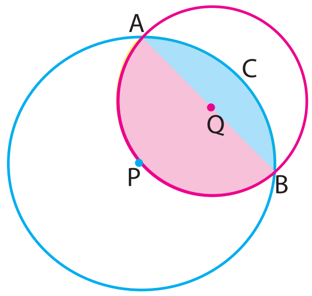
(A) $18\pi + 18$
(B) $18\pi - 18$
(C) $14\pi + 14$
(D) $14\pi - 15$
(E) $10\pi + 10$

Pembahasan:

Perhatikan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut!



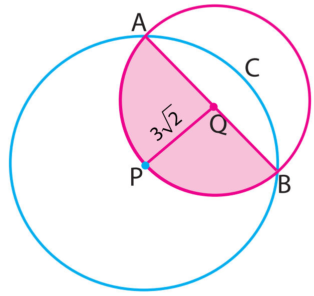
Luas daerah yang diarsir seperti terllihat pada gambar di atas dapat dipecah menjadi dua bagian. Perhatikan gambar berikut!



Berdasarkan gambar di atas dapat diketahui bahwa luas daerah yang diarsir terdiri atas luas setengah lingkaran kecil dan luas tembereng ABC dari lingkaran besar.

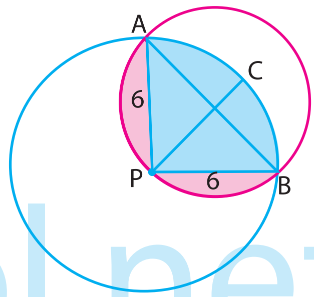
$$L_{arsir} = L_{\frac{1}{2}\,kecil} + L_{temberengABC}$$

Menghitung Luas Setengah Lingkaran Kecil



$$\begin{aligned} L_{\odot kecil} &= \frac{1}{2}\pi(3\sqrt{2})^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi(9 \times 2) \\ &= \frac{1}{2}\pi(18) \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

Menghitung Luas Tembereng ABC.
Perhatikan gambar berikut!



Luas Tembereng ABC

$$\begin{aligned} L_{temberengABC} &= L_{\frac{1}{4}\odot besar} - L_{\Delta APB} \\ &= \frac{1}{4}\pi(6^2) - \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \\ &== \frac{1}{4}\pi(36) - \frac{1}{2} \times 36 \\ &= 9\pi - 18 \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah

$$\begin{aligned} L_{arsir} &= L_{\frac{1}{2}\odot kecil} + L_{temberengABC} \\ &= 9\pi + 9\pi - 18 \\ &= 18\pi - 18 \end{aligned}$$

» **Jawaban: B**

9. Jika $\int_{-4}^{4} f(x)(\sin x + 1)dx = 8$, dengan f(x) fungsi genap dan $\int_{-2}^{4} f(x)\ dx = 4$, maka $\int_{-2}^{0} f(x)\ dx = ...$

(A.) 0
(B.) 1
(C.) 2
(D.) 3
(E.) 4

Pembahasan:

$$\int_{-4}^{4} f(x)(\sin x + 1)dx = 8$$

$$\int_{-4}^{4} \underbrace{f(x)\sin x}_{\text{fungsi ganjil}} dx + \int_{-4}^{4} \underbrace{f(x)}_{\text{fungsi genap}} dx = 8$$

PENTING!!!

Nilai integral dari suatu fungsi ganjil adalah 0.

Sehingga dapat diperoleh persamaan berikut.

$$0 + 2\int_{0}^{4} f(x)\, dx = 8$$

$$\int_{0}^{4} f(x)\, dx = 4$$

Ingat! Sifat Inegral

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{b} f(x)\, dx$$

Maka

$$\int_{-2}^{4} f(x)\, dx = 4$$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{4} f(x)\, dx = 4$$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\, dx + 4 = 4$$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\, dx = 0$$

» **Jawaban: A**

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x\cos x}{\sin x \cos x} = ...$

(A.) 0 (D.) 3
(B.) 1 (E.) 4
(C.) 2

Pembahasan:

Ingat!!! Sifat Nilai Limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x + x\cos x}{\sin x \cdot \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x)}{\sin x \cdot \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1+\cos x}{\cos x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos x} \\
&= 1 \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} + \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x} \right) \\
&= 1 \cdot \left(\frac{1}{\cos 0} + \lim_{x\to 0} 1 \right) \\
&= 1 \cdot \left(\frac{1}{1} + 1 \right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

» **Jawaban: C**

11. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cot\left(\dfrac{1}{x}\right) \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = ...$

(A.)–2 (D.) 1
(B.) –1 (E.) 2
(C.) 0

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \cot\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} x \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\
&= 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

» **Jawaban: D**

12. Jika kurva $y = \dfrac{(x^2 + 2bx + b^2)(x - a)}{(x^2 - a^2)(x^2 + 2)}$, dengan $a \neq 0$,

tidak mempunyai asimtot tegak, maka kurva

$y = \dfrac{(a + 2b)x^2 - 7a}{(a - 2b)x^2 + 7b}$, mempunyai asimtot datar ....

(A.) $y = 6$ (D.) $y = -6$
(B.) $y = 3$ (E.) $y = -5$
(C.) $y = 2$

Pembahasan:

$$y = \frac{(x^2+2bx+b^2)(x-a)}{(x^2-a^2)(x^2+2)}$$
$$= \frac{(x+b)^2\,\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x+a)(x^2+2)}$$
$$= \frac{(x+b)^2}{(x+a)(x^2+2)}$$

Agar *y **tidak** mempunyai asimtot tegak lurus*, maka:
$x+a = x+b \rightarrow a = b$

Asimtot datar:

$$y = \lim_{x\to\infty}\frac{(a+2b)x^2-7a}{(a-2b)x^2+7b}$$
$$= \frac{a+2b}{a-2b}$$
$$= \frac{a+2a}{a-2a}$$
$$= \frac{3a}{-a} = -3$$

» **Jawaban: D**

13. Misalkan $f(x) = 2\tan\left(\sqrt{\sec x}\right)$, maka $f'(x) = ...$
(A.) $\sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)\cdot \tan x$
(B.) $\sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)\cdot\sqrt{\sec x}\cdot\tan x$
(C.) $2\sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)\cdot\sqrt{\sec x}\cdot\tan x$
(D.) $\sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)\cdot\sec x\cdot\tan x$
(E.) $2\sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)\cdot\sec x\cdot\tan x$

Pembahasan:

Ingat!!! Sifat Nilai Limit

$y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x$
$y = \tan x \rightarrow y' = \sec^2 x$

Misalkan

$$u = \sqrt{\sec x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\sec x\cdot\tan x}{2\sqrt{\sec x}}$$
$$y = 2\tan u \rightarrow \frac{dy}{du} = 2\sec^2(u) = 2\sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)$$

Sehingga,

$$f(x) = 2\tan x\left(\sqrt{\sec x}\right)$$
$$f'(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$= \cancel{2}\sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)\cdot\frac{\cancel{\sec x}^{\sqrt{\sec x}}\cdot\tan x}{\cancel{2\sqrt{\sec x}}}$$
$$= \sec^2\left(\sqrt{\sec x}\right)\cdot\sqrt{\sec x}\cdot\tan x$$

» **Jawaban: B**

14. Garis singgung dari $f(x) = \dfrac{1}{x^2\cos x}$ di titik $x = \pi$ memotong garis $y = x + c$ di titik $(\pi, 0)$. Nilai c adalah ....
(A.) $-\frac{1}{4}\pi$
(B.) $-\frac{1}{2}\pi$
(C.) $-\pi$
(D.) $\frac{1}{2}\pi$
(E.) π

Pembahasan:

TRIK!!!

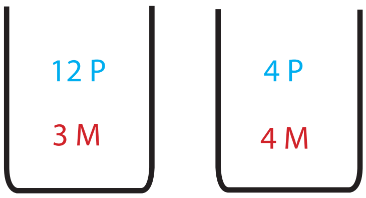
Substitusi titik $(\pi, 0)$ ke garis $y = x + c$

$y = x + c$
$0 = \pi + c$
$c = -\pi$

» **Jawaban: C**

15. Di dalam kotak I terdapat 12 bola putih dan 3 bola merah. Di dalam kotak II terdapat 4 bola putih dan 4 bola merah. Jika dari kotak I dan kotak II masing-masing diambil 2 bola satu per satu dengan pengembalian, maka peluang yang terambil 1 bola merah adalah ....
(A.) 0.04
(B.) 0.10
(C.) 0.16
(D.) 0.32
(E.) 0.40

Pembahasan:



$$P(1\,M) = 2\left(\frac{\cancel{3}_1}{\cancel{15}_5}\cdot\frac{\cancel{12}_4}{\cancel{15}_5}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{4}_1}{\cancel{8}_2}\cdot\frac{\cancel{4}_1}{\cancel{8}_2}\right)+2\left(\frac{\cancel{4}_1}{\cancel{8}_2}\cdot\frac{\cancel{4}_1}{\cancel{8}_2}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{12}_4}{\cancel{15}_5}\cdot\frac{\cancel{12}_4}{\cancel{15}_5}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\cancel{4}}{25}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)+2\left(\frac{1}{\cancel{4}^1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{16}^4}{25}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{25}\right)+2\left(\frac{4}{25}\right)$$
$$= \frac{2}{25}+\frac{8}{25}$$
$$= \frac{10}{25}$$
$$= \frac{40}{100}$$
$$= 0,40$$

» **Jawaban: E**